©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 103–122

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

© Österreichische Akademie der Wissenschaften 1999
Printed in Austria

Eine Bemerkung zum Begriff des Standardmodells für den Peanoformalismus*

Von

C. C. Christian

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998
durch das w. M. Curt C. Christian)

Wir erläutern zunächst den Begriff der schwachen metamathematischen Induktion und dann den der starken metamathematischen Induktion.

Sei $A(x)$ eine Formel des Peanoformalismus Z_P bzw. einer Erweiterung Z_P^+ desselben, sei M ein Normalmodell für Z_P (bei dem das Gleichheitssymbol als mengentheoretische Gleichheit interpretiert ist), so wollen wir eine Menge P definiert durch $P = \{u \in |M| \| A_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1\}$ eine „Z_P-Formel basierte" Menge nennen.

Die mit $A(x)$ gebildete Z_P^+-Formel

$$A(0) \wedge \bigwedge_x \cdot A(x) \rightarrow A(S(x))\cdot \rightarrow \bigwedge_x A(x)$$

ist ein formales Z_P-Axiomenschema der Mathematischen Induktion, das voraussetzungsgemäß – $(\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+))$ – in M gültig ist. Die

*Aus Anlaß des 150. Todestages von Bernard Bolzano.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Auswertung ergibt:

$$\mathcal{A}_{\langle M, v^x/0_M\rangle} = 1 \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \mathcal{A}_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1 \rightarrow \mathcal{A}_{\langle M, v^x/S_M(u)\rangle} = 1 \;\dot{\rightarrow}$$

$$\dot{\rightarrow} \bigwedge_{u\in|M|} \mathcal{A}_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1$$

und daraus: $0_M \in P \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \cdot u \in P \rightarrow S_M(u) \in P \cdot \rightarrow \bigwedge_{u\in|M|} u \in P$.

Wenn P eine „Z_P-Frm basierte" Menge ist, sprechen wir von einem schwachen metamathematischen Induktionsprinzip.

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \rightarrow \bigwedge_{P\in Z_P-\mathrm{Frm\ Bas}} 0_M \in P \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \cdot u \in P \rightarrow$$

$$\rightarrow S_M(u) \in P \cdot \rightarrow \bigwedge_{u\in|M|} u \in P:$$

Wir definieren nun den Begriff der starken metamathematischen Induktivität.

Intpr Str $(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow}$ Stark Indukt $(M) \leftrightarrow \bigwedge_{P\in Z_P-\mathrm{Frm\ Bas}} \cdot 0_M \in P \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \cdot u \in P \rightarrow S_M(u) \in P \cdot \rightarrow \bigwedge_{u\in|M|} u \in P$.

Der Begriff des Standardmodells ist definiert als Stark Induktives Normalmodell.

StandMod $(M, Z_P^+) :\leftrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \wedge$ Stark Ind (M).

Anmerkung:

$$\mathrm{Wegen}(a = b)_{\langle M, v\rangle} = 1 \leftrightarrow \chi \doteq (a_{\langle M, v\rangle}, b_{\langle M, v\rangle}) = 1$$

$$\leftrightarrow a_{\langle M, v\rangle} \doteq b_{\langle M, v\rangle}$$

$$\leftrightarrow a\begin{bmatrix} 0 & S & x_i \\ 0_M & S_M & u_i \end{bmatrix} \doteq b\begin{bmatrix} 0 & S & x_i \\ 0_M & S_M & u_i \end{bmatrix}$$

ist $\mathcal{A}_{\langle M, v\rangle} = 1$ äquivalent einer Formel, die aus der objektsprachlichen Formel $\mathcal{A}$ durch Ersatz der Junktoren durch Metajunktoren, der Quantoren durch $|M|$-relativierte Metaquantoren, der Symbole 0 und S und $=$ durch die M-Interpretation 0_M und S_M und $\doteq$ hervorgeht.

Schließlich definieren wir als Finite Accessibilität:

$$\mathrm{StandMod}(N, Z_P) \ddot{\rightarrow} \mathrm{IntprStr}(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \mathrm{FinAccess}(M):$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{u\in|M|} \bigvee_{k\in|N|} u = S_M^{(k)}(0_M)$$

Die rechte Seite der Äquivalenz drückt die Erreichbarkeit jedes Elementes von $|M|$ vom 0_M-Element durch eine endliche Anzahl von S_M-Anwendungen aus.

Die Bedeutung des Standardmodells liegt im folgenden:

Betrachtet man etwa den 1. Unvollständigkeitssatz in der Rosserschen Form, so kann er wegen $\bigwedge \cdot_{T \in \text{Theorie}'} \text{Cst}\, T \leftrightarrow \bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, T)$. so angeschrieben werden:

$$\bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P) \rightarrow \not\vdash_{Z_P} Ro^{\triangle} \wedge \not\vdash_{Z_P} \neg Ro^{\triangle}$$

($Ro^{\triangle}$ bedeutet die diagonalisierte Rosserformel; $Gö^{\triangle}$ bedeutet im folgenden die diagonalisierte Gödelformel)

Durch ein (Normal) Modell sind lediglich schwache Metamathematische Induktionen verbürgt; beim Beweis des obigen Unvollständigkeitssatzes wird aber das durch starke Metamathematische Induktion bewiesene Repräsentationstheorem rekursiver Relationen verwendet.

Ebenso werden zahlreiche andere einfache Sätze wie

$$\bigwedge_{k, m \in |n|} \vdash_{Z_P} \bar{k} + \bar{m} = \overline{k \overset{+}{_n} m} \quad \text{mit} \quad \bar{k} = S^{(k)}(0), S^{(0_n)}(0) = 0$$

$$S^{S_n(k)}(0) = SS^{(k)}(0)$$

durch starke Metamathematische Induktion bewiesen.

Die Hypothese $\bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P)$ bzw. $\text{Cst}(Z_P)$ im obigen 1. Unvollständigkeitssatz ist daher zu schwach.

Wie im folgenden gezeigt, impliziert die Zugrundelegung eines Standardmodells für Z_P die ω-Consistenz und damit die Consistenz von Z_P, die durch starke Metamathematische Induktion bewiesenen involvierten Hilfssätze sowie schließlich den 1. Unvollständigkeitssatz in der Version

$$\bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P) \dot{\rightarrow} \not\vdash_{Z_P} Ro^{\triangle} \wedge \not\vdash_{Z_P} \neg Ro^{\triangle}$$
$$\wedge \not\vdash_{Z_P} Gö^{\triangle} \wedge \not\vdash_{Z_P} \neg Gö^{\triangle}$$

Gödel hatte – dies scheint auch die Ansicht Fefermans zu sein – keinen Grund zur Unbefriedigtheit darüber, daß für den 2. Teil seines Unvollständigkeitssatzes die ω-Consistenz in Anspruch genommen werden mußte.

Die älteren mathematischen Grundlagenforscher Bolzano, Kronecker, Dedekind, Peano waren sich der Bedeutung der natürlichen Zahlen als Grundlage für alle anderen Entwicklungen der Zahlensysteme bewußt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(Kronecker: Die natürlichen Zahlen hat Gott vorgegeben, alles andere ist Menschenwerk.)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Le}_1 \\ \mathrm{StandMod}(n, Z_P) \ddot{\rightarrow} \\ \quad \ddot{\rightarrow} \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \mathrm{StarkInd}(M) \leftrightarrow \mathrm{FinAccess}(M) \end{array}}$$

1.) $\mathrm{StandMod}\ (N, Z_P) \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \wedge \mathrm{Stark\ Ind}(M) \rightarrow$

$$\overset{\alpha)}{\rightarrow} 0_M \in |M| \wedge 0_M = S_M^{(0_N)}(0_M) \wedge 0_N \in |N|$$

$$\overset{\mathrm{Part}}{\rightarrow} 0_M \in |M| \wedge \bigvee_{k \in |N|} 0_M = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\overset{\beta)}{\rightarrow} k \in |N| \wedge u = S_M^{(k)}(0_M) \rightarrow S_N \quad |N| \rightarrow |N|$$

$$\rightarrow k \in |N| \rightarrow]S_N(k) \in |N|$$

$$\rightarrow S_N(k) \in |N| \wedge S_M(u) = S_M S_M^{(k)}(0_M)$$

$$= S_M^{(S_N k)}(0_M)$$

$$\overset{\mathrm{Part}}{\rightarrow} \bigvee_{k \in |N|} S_M(u) \qquad = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\rightarrow \bigwedge_k$$

$$\rightarrow \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \rightarrow \bigvee_{k \in |N|} S_M(u) = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\rightarrow \bigwedge_{u \in |M|} \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \rightarrow \bigvee_{k \in |N|} S_M(u) = S_M^{(k)}(0_M).$$

$$\overset{\alpha,\beta}{\rightarrow} \mathrm{StarkInd}(M) \rightarrow] \bigwedge_{u \in |M|} \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\mathrm{StandMod}(n, Z_P) \ddot{\rightarrow} \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \mathrm{StarkInd}(M)$$

$$\rightarrow \bigwedge_{u \in |M|} \bigwedge_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \rightarrow \mathrm{FinAccess}(M)$$

$$[\{u \in |M| | \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M)\} \notin Z_P^+ - \mathrm{FrmBas},$$

$$\bigvee_y x = S^{(y)}(0) \notin Z_P - \mathrm{Frm}]$$

2.) $\text{StandMod}\,(N, Z_P) \dot{\wedge} \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \wedge \text{FinAccess}(M) \dot{\rightarrow}$

$$\dot{\rightarrow} \neg \text{StarkInd}(M) \rightarrow \bigvee_{P \notin Z_P \text{Frm Bas}} \cdot 0_M \in P \wedge \bigwedge_{u \in |M|} \cdot u \in P$$

$$\rightarrow S_M(u) \in P \quad \wedge \bigvee_{u \in |M|} u \notin P$$

$$\overset{\alpha)}{\rightarrow} 0_N \in |N| \wedge S_M^{(0_N)}(0_M) = 0_M \in P$$

$$\wedge S_M^{(0_N)}(0_M) \in P$$

$$\overset{\beta)}{\rightarrow} \bigwedge_u \cdot u \in |M| \rightarrow u \in P \rightarrow S_M(u) \in P.$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \cdot S_M^{(k)}(0_M) \in |M| \rightarrow]S_M^{(k)}(0_M) \in P$$

$$\rightarrow S_M S_M^{(k)}(0_M) \in P.$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \cdot S_M^{(k)}(0_M) \in P \rightarrow S_M^{(S_N k)}(0_M) \in P.$$

$$\overset{\alpha,\beta}{\rightarrow} \text{StarkInd}(N)]$$

$$\bigwedge_{k \in |N|} S_M^{(k)}(0_M) \in P$$

$$\overset{x}{\rightarrow} \bigvee_u \cdot u \in |M| \wedge u \notin P \wedge \text{FinAccess}(M).$$

$$\overset{\text{Hy}_3}{\rightarrow} \bigvee_u \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \wedge u \notin P.$$

$$\rightarrow \bigvee_{k \in |N|} S_M^{(k)}(0_M) \notin P, \neg \bigwedge_{k \in |N|} S_M^{(k)}(0_M) \in P, \alpha, \beta\ ]\ \perp$$

$$\rightarrow \text{StarkInd}(M)$$

1,2)] $\text{StandMod}\,(N,\ Z_P) \ddot{\rightarrow} \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \text{StarkInd}(M) \leftrightarrow$ Fin Access (M)

Le_2
$\text{StandMod}(N, Z_P) \dot{\rightarrow} \text{StandMod}(N_1, Z_P^+)(N, Z_P^+) \dot{\rightarrow} h\colon \{\langle u, y\rangle \mid \bigvee_{k \in \lvert N \rvert} u = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \wedge y = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) \cdot\} \rightarrow N_1 \underset{h}{\overset{\text{iso}}{\sim}} N_2$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Prä 1) $\mathrm{StandMod}(N, Z_P) \dot{\to} \mathrm{StandMod}(N_i, Z_P^+) \to \mathrm{FinAccess}(N_i)$

$$\to |N_i| = \{u \mid \bigvee_{k \in |N|} u = S_{N_i}^{(k)}(0_{N_i})\}$$

Prä 2) $\mathrm{StandMod}(N, Z_P) \wedge \mathrm{StandMod}(N_i, Z_P^+) \to \bigwedge_{k,\, l \in |N|} \cdot S_N^{(k)}(0_{N_i})$

$$= S_N^{(l)}(0_{N_i}) \to k = l.$$

$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{1.)} \underline{\mathrm{Func}\ h}$

$$\to \langle u, y_1 \rangle \langle u, y_2 \rangle \in h \to \bigvee_{k \in |N|} \cdot u = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \wedge y_1 = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) \cdot \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{l \in |N|} \cdot u = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) \wedge y_2 = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}).$$

$$\to S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) = u = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1})$$

$$\xrightarrow{\text{Prä 2)}} k = l$$

$$\to y_1 = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}) = y_2$$

$$\to y_1 = y_2$$

$\xrightarrow{2.)} \underline{\mathrm{Un}_1\ (h)}$

$$\langle u_1, y \rangle \langle u_2, y \rangle \in h \to \bigvee_{k \in |n|} u_1 = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \wedge y = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) \quad \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{l \in |N|} \cdot u_2 = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) \wedge y = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}).$$

$$\to S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) = y = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2})$$

$$\xrightarrow{\text{Prä 2)}} k = l$$

$$\to u_1 = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) = u_2$$

$$\to u_1 = u_2$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{3.)} \underline{\mathrm{db}(h) = |N_1|}$$

$$u \in \mathrm{db}(h) \leftrightarrow \bigvee_{y} \langle u, y\rangle \in h$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{y} \bigvee_{k \in |N|} \cdot u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}).$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{k \in |N|} u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1})[\wedge \bigvee_{y} y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2})]$$

$$\overset{\text{Prä 1}}{\leftrightarrow} u \in |N_1|$$

$$\mathrm{db}(h) = |N_1|$$

$$\xrightarrow{4.)} \underline{wb\ h = |N_2|} \text{ Prä1] StandMod } (N, Z_P)(N_2, Z_P^+) \dot{\rightarrow}$$

$$\dot{\rightarrow} \bigwedge_{y} y \in |N_2| \leftrightarrow \bigvee_{k \in |N|} y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}).$$

$$y \in wb\ h \leftrightarrow \bigvee_{u} \langle u, y\rangle \in h$$

$$\overset{\text{Def } h}{\leftrightarrow} \bigvee_{u} \bigvee_{k \in |N|} \cdot u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}).$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{k \in |N|} \left[\bigvee_{u} u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge \right] y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2})$$

$$\overset{\text{Prä 1)}}{\leftrightarrow} y \in |N_2|$$

$$wb\ h = |N_2|$$

$$\xrightarrow{1-4} \quad |N_1| \underset{h}{\overset{\text{bij}}{\sim}} |N_2|$$

$$\xrightarrow{5.)} \underline{h(0_{N_1}) = 0_{N_2}}$$

$$h(0_{N_1}) = 0_{N_2} \leftrightarrow 0_{N_1} \in |N_1| = dbh \wedge h(0_{N_1}) = 0_{N_2}$$

$$\leftrightarrow \langle 0_{N_1}, 0_{N_2}\rangle \in h$$

$$\left[\overset{\text{Def } h}{\leftrightarrow} \bigvee_{\substack{k \in |N| \\ \| \\ 0_N}} \cdot 0_{N_1} = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge 0_{N_2} = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}). \right]$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{6.)} \underline{\bigwedge_{u \in |N_1|} hS_{N_1}(u) = S_{N_2}(hu)}$$

$$\alpha)\ \text{Prä}\ k \in |n| \to \langle S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}), S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2})\rangle \in h$$

$$\left[\leftrightarrow \bigvee_{\substack{l \in |N| \\ \| \\ k}} \cdot S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) = S^{(l)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}) = S^{(l)}_{N_2}(0_{N_2}).\right]$$

$$\bigwedge_{k \in |N|} hs^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}) = S^{(k)}_{N_2}(h\ 0_{N_1})$$

$$\beta) \bigwedge_{\substack{u \\ k \in |N|}} \cdot u \in |N_1| \wedge u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \to hS_{N_1}(u) = hS_{N_1}(S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}))$$

$$= hS^{(k +_N 1)}_{N_1}(0_{N_1})$$

$$\overset{\alpha)}{=} S^{(k +_N 1)}_{N_2}(0_{N_2})$$

$$= S_{N_2} S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2})$$

$$\overset{\alpha)}{=} S_{N_2} hS^{(k)}_{N_1}(0_{N_1})$$

$$\bigwedge_{u} \cdot u \in |N_1| \wedge \bigvee_{k \in |N|} u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \to hS_{N_1}(u) = S_{N_2}(hu).$$

$$\bigwedge_{u} \cdot u \in |N_1| [\wedge\ \mathrm{FinAccess}\,(N_1)] \to hS_{N_1}(u) = S_{N_2}(h_u).$$

$$\mathrm{StandMod}(N_1, Z^+_P)$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{7.)} \underline{\bigwedge_{u, y \in |n_1|} h(u + N_1 y) = hu + N_2 hy}\ \text{Starke MMInd}'y, N_1 \in$$

Stark Induktiv

$$\xrightarrow{1.)} \vdash_{Z^+_P} x + 0 = x \qquad x + Sy = S(x + y)\ \mathrm{StandMod}\ (N_1, Z^+_P)$$

$$\mathrm{StandMod}\ (N_2, Z^+_P)$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} u +_{N_1} 0_{N_1} = u \qquad \bigwedge_{\substack{u\in|N_1|\\ y\in|N_2|}} u +_{N_1} S_{N_1} y = S_{N_1}(u +_{N_1} y)^{*}$$

$$\bigwedge_{u\in|N_2|} u +_{N_2} 0_{N_2} = u \qquad u +_{N_2} S_{N_2} y = S_{N_2}(u +_{N_2} y)^{**}$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} u +_{N_1} 0_{N_1} = u \qquad P := \{y \in |N_1| \mid \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} y) = hu +_{N_2} hy\}$$

$$\begin{aligned} h(u +_{N_1} 0_{N_1}) &= hu \\ &= hu +_{N_2} 0_{N_2} \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} (u +_{N_1} 0_{N_1}) = hu +_{N_2} h0_{N_1} \wedge 0_{N_1} \in |N_1|$$

$$0_{N_1} \in P$$

$$\begin{aligned} \overset{2.)}{\rightarrow} \bigwedge_{y\in|N_1|} \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u + N_1 y) = hu +_{N_2} hy \rightarrow \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} S_{N_1} y) \\ \overset{*}{=} hS_{N_1}(u +_{N_1} y) \\ \overset{6.)}{=} S_{N_2} h(u +_{N_1} y) \\ \overset{\text{IA}}{=} S_{N_2}(hu +_{N_2} hy) \\ \overset{**}{=} hu +_{N_2} S_{N_2} hy \\ \overset{6.)}{=} hu +_{N_2} hS_{N_1} y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{y\in|N_1|} \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} y) = hu +_{N_2} hy \rightarrow \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} S_{N_1} y) \\ = hu +_{N_2} hS_{N_1} y. \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{y\in|N_1|} \cdot y \in P \rightarrow S_{N_1} y \in P.$$

$$\begin{aligned} &\overset{1.,2.)}{\rightarrow} \text{Stark Indukt}(N_1) \rightarrow] \bigwedge_{y\in|N_1|} y \in P \\ &\rightarrow \bigwedge_{y,u\in|N_1|} h(u +_{N_1} y) = hu +_{N_2} hy \end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{8.)} \bigwedge_{u,y\in|N_1|} h(u\cdot_{N_1} y) = hu\cdot_{N_2} hy \qquad \text{Starke MMInd}'y$$

$$\vdash_{Z_P^+} x\cdot 0 = 0 \qquad \text{StandMod } (N_1, Z_P^+)(N_2, Z_P^+)$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} u\cdot_{N_1} 0_{N_1} = 0_{N_1}$$

$$u\cdot_{N_2} 0_{N_2} = 0_{N_1}$$

$$\vdash_{Z_P^+} x\cdot Sy = x\cdot y + x$$

$$\bigwedge_{u,y\in|N_1|} u\cdot_{N_1} S_{N_1} y = u_{N_1} y +_{N_1} u$$

$$u\cdot_{N_2} S_{N_2} y = u\cdot_{N_2} y +_{N_2} u$$

$$\xrightarrow{\alpha)} \bigwedge_{u\in|N_1|} u\cdot_{N_1} 0_{N_1} = 0_{N_1}$$

$$h(u\cdot_{N_1} 0_{N_1}) = h0_{N_1} \overset{5.)}{=} 0_{N_2} = hu\cdot_{N_2} 0_{N_2} = hu\cdot_{N_2} h\, 0_{N_1}$$

$$h(u\cdot_{N_1} 0_{N_1}) = hu\cdot_{N_2} h0_{N_1}$$

$$\xrightarrow{\beta)} \bigwedge_{u,y\in|N_1|} h(u\cdot_{N_1} y) = hu\cdot_{N_2} hy \rightarrow u\cdot_{N_1} S_{N_1} y = (u\cdot_{N_1} y) +_{N_1} u$$

$$\rightarrow h(u\cdot_{N_1} S_{N_1} y) = h(u\cdot_{N_1} y +_{N_1} u)$$

$$\overset{7.)}{=} h(u\cdot_{N_1} y) +_{N_2} hu$$

$$\overset{\mathrm{IA}}{=} (hu\cdot_{N_2} hy) +_{N_2} hu$$

$$= hu\cdot_{N_2} S_{N_2} h(y)$$

$$= hu\cdot_{N_2} hS_{N_1}(y)$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|}\bigwedge_{y\in|N_1|} h(u\cdot_{N_1} y) = hu\cdot_{N_2} hy \rightarrow h(u\cdot_{N_1} S_{N_1} y) = hu\cdot_{N_2} hS_{N_1} y$$

$$\alpha\beta]\ \bigwedge_{u,y\in|N_1|} h(u\cdot_{N_1} y) = hu\cdot_{N_2} hy$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{1-8} N_1 \overset{\text{iso}}{\sim} N_2$$

$$\bigvee_N \text{StandMod } (N, Z_P) \to \bigwedge_{N_1,N_2} \cdot\text{StandMod } (N_1, Z_P^+)(N_2, Z_P^+)$$

$$\to N_1 \overset{\text{iso}}{\sim} N_2.$$

$$\bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P^+) \to$$

$$\bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P^+) \to \bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P^+) \wedge \bigwedge_{N_1,N_2}$$

$$\to \overset{1}{\bigvee_N} \text{StandMod}(N, Z_P^+) \text{ bis auf Iso}$$

$$\boxed{\mathrm{Le}_3 \text{ StandMod } (N, Z_P) \dot{\to} \bigvee_M \text{StandMod } (M, Z_P^+) \to \omega \text{ Cst}(Z_P^+)}$$

$$\text{StandMod } (N, Z_P) \wedge \text{StandMod}(M, Z_P^+) \wedge \neg\omega\,\text{Cst}(Z_P^+) \to$$

$$\xrightarrow{\alpha)} \underline{\bigwedge_{k\in|N|} (S^{(k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle} = S_M^{(k)}(0_M)} \qquad \text{Starke MM Ind}'k$$

a) $0_N \in |N| \wedge (S^{(0_N)}(0))_{\langle M,\nu\rangle} = 0_{\langle M,\nu\rangle} = 0_M = S_M^{(0_N)}(0_M)$

b) $\bigwedge_{k\in|N|} (S^{(k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle} = S_M^{(k)}(0_M) \to$

$$\to ((S^{(S_N k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle} = (SS^{(k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle}$$

$$= S_M(S^{(k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle}$$

$$= S_M S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\to ((S^{(S_N k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle} = S_M^{(S_N k)}(0_M)$$

a, b] $\bigwedge_{k\in|N|} (S^{(k)}(0))_{\langle M,\nu\rangle} = S_M^{(k)}(0_M)$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\text{StandMod}\,(N, Z_P) \wedge \text{StandMod}\,(M, Z_P^+) \wedge \neg\,\omega\,\text{Cst}(Z_P^+) \rightarrow$$

$$\overset{\beta)}{\rightarrow} \bigvee_{A \in \text{Frm}_{Z_P^+}} \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{Z_P^+} A\,\frac{x}{k} \wedge \vdash_{Z_P^+} \neg \bigwedge A$$

$$\vdash_{Z_P^+} A\,{}^{x}_{S^{(k)}(0)} \wedge \vdash_{Z_P^+} \neg \bigwedge A \wedge \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+)$$

$$\bigwedge_{k \in |N|} (A\,{}^{x}_{S^{(k)}(0)})_{\langle M, v\rangle} = 1 \wedge (\neg \bigwedge_{x} A)_{\langle M, v\rangle} = 1$$

$$\bigwedge_{k \in |N|} A_{\langle M, v^x/S^{(k)}(0))_{\langle M, v\rangle}\rangle} = 1 \wedge \neg\,(\bigwedge_{r \in |M|} A_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1)$$

$$\alpha) \rightarrow] \bigwedge_{k \in |N|} A_{\langle M, v^x/S_M^{(k)}(0_M)\rangle} = 1$$

$$\bigvee_{A \in \text{Frm}_{Z_P^+}} \bigwedge \cdot\, u \in |M| \overset{\text{Le1}}{\rightarrow} \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \wedge A_{\langle M, v^x/S_M^{(k)}(0_M)\rangle}$$

$$= 1 \quad \wedge \neg\,(\ )$$

$$\rightarrow \qquad \bigwedge_{u \in |M|} A_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1 \wedge \neg\,(\bigwedge_{u \in |M|} A_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1), \perp$$

$\text{StandMod}\,(N, Z_P^+) \wedge \text{StandMod}\,(M, Z_P^+) \rightarrow \omega\,\text{Cst}\,(Z_P^+)$
$\text{StandMod}\,(N, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \bigvee_M \text{StandMod}\,(M, Z_P^+) \rightarrow \omega\,\text{Cst}\,(Z_P^+)$
Tollendo tollens erhält man das Corrollar 3β:

$$\text{StandMod}(N, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \omega\ \text{Incst}(Z_P^+) \rightarrow \neg \bigvee_M \text{StandMod}(M, Z_P^+)$$

$$\rightarrow \neg \bigvee_M \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \wedge$$

$$\wedge\ \text{Stark Ind}(M).$$

Klarerweise gilt: $\text{StandMod}\,(N, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \omega\ \text{Cst}(Z_P^+) \rightarrow \text{Cst}(Z_P^+)$

$$\text{StandMod}\,(N, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \omega\ \text{Cst}\,(Z_P^+)$$

$$\rightarrow \left[\bigwedge_{k \in |n|} \vdash_{Z_P^+} \bar{k} = \bar{k} \rightarrow\right] \not\vdash_{Z_P^+} \neg \bigwedge_{x} x = x$$

$$\dot{\rightarrow} \omega\ \text{Cst}\,(Z_P^+) \rightarrow \text{Cst}\,(Z_P^+)$$

$\bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{Z_P^+} \bar{k} = \bar{k}$ wird durch starke metamathematische Induktion nach k bewiesen. ($\{k \in |N| \mid \vdash_{Z_P^+} S^{(k)}(0) = S^{(k)}(0)\}$ ist nicht Z_P^+-Formel basiert.)

Z_P für Z_P^+ ergibt:

$$\bigvee_N \text{StandMod}\ (N, Z_P) \underset{\text{Le}_3}{\longrightarrow} [\omega\,\text{Cst}\ Z_P \rightarrow]\ \text{Cst}\ Z_P$$

Dieses Resultat steht im Einklang mit dem aus dem 2. Unvollständigkeitssatz folgenden Ergebnis, daß die Consistenz von Z_P nur mit höheren Mitteln als in Z_P selbst formal verfügbar bewiesen werden kann.

$$\boxed{\text{Le}_4\ \text{StandMod}\ (N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}} \omega\ \text{Cst}\ Z_P^+ \rightarrow \bigvee_M \text{StandMod}\ (M, Z_P^+)}$$

$$\text{StandMod}\ (N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}}$$

$$\vdash_{\overline{ML}} \omega\ \text{Cst}\ Z_P^+ \wedge \bigwedge_m \cdot\text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \rightarrow \neg\text{Stark Ind}(M). \rightarrow$$

$$\overset{M\|N}{\rightarrow} \text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+) \rightarrow \neg\text{Stark Ind}(N) \overset{\text{Hy}}{\wedge} \text{Stark Ind}(N), \perp$$

$$\rightarrow \neg\text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+)$$

$$\text{Prä} \vdash_{\overline{ML}} \omega\ \text{Cst}\ Z_P^+ \overset{\text{tolltoll}}{\rightarrow} \text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+)$$

$$\rightarrow \bigvee_M \cdot\text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \wedge \text{StarkInd}(M).$$

$$\bigwedge_N$$

$$\text{Prä} \vdash_{\overline{ML}} \omega\ \text{Cst}\ Z_P^+ \rightarrow \left[\bigvee_N \text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+) \rightarrow\right] \bigvee_M \text{Stand Mod}(M, Z_P^+)$$

$$\text{Cst}\ Z_P^+$$

$$\text{Stand Mod}\ (N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}}^{B} \omega\ \text{Cst}\ Z_P^+ \rightarrow \bigvee_M \text{StandMod}(M, Z_P^+)$$

$$\text{StandMod}\ (N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}} \omega\ \text{Cst}\ Z_P^+ \rightarrow \bigvee_M \text{StandMod}(M, Z_P^+)$$

Da $\text{GenVar}_B \cap \text{Fr Var}_{\text{StandMod}\ (N, Z_P)} \neq \phi$, ist implikative Überstellung von StandMod (N, Z_P) gemäß Metadeduktionstheorem nicht möglich.

Abschließend mögen 3 Erweiterungen von Z_P hinsichtlich ihres Modellcharakters untersucht werden:

$$Z_P[c; \{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}], Z_P[\neg G^{\triangle}], L[L_{Z_P}; \{A \in Z_P | \text{Val}(A, N)\}]$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$\text{StandMod}\,(N, Z_P) \rightarrow$

$$\overset{1.)}{\rightarrow} Z_P^{+c} := Z_P[c; \{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}]$$

Z_P^{+c} ist also jene Erweiterung, die aus Z_P durch Hinzunahme einer neuen Konstante c und der Eigenaxiomenmenge $\{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}$ hervorgeht; α) wegen $\bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c \neq \bar{k}$ und $\vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c = c, \bigvee_x c = x, \neg \bigwedge_x c \neq x$ gilt: ω Incst (Z_P^{+c}), wegen $\text{Le}_3\beta : \bigwedge_M \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow \neg$ StandMod (M, Z_P^{+c}).

$$\bigwedge_M \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow \text{Mod}_{\text{norm}} \backslash \text{StandMod}(M, Z_P^{+c}).$$

$$\rightarrow \text{Non StandMod}\,(M, Z_P^{+c}).$$

β) Wir zeigen: $\bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c})$

$$\begin{aligned}
\neg \text{ Cst } Z_P^{+c} \rightarrow & \bigvee_{k_{i_1}, \ldots, k_{i_n} \in |N|} c \neq \overline{k_{i_1}} \wedge \quad \wedge c \neq \overline{k_{i_n}} \vdash_{\overline{Z_P[c]}} \bot \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P[c]}} c = \overline{k_{i_1}} \vee \quad \vee c = \overline{k_{i_n}} \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P}} x = \overline{k_{i_1}} \vee \quad \vee x = \overline{k_{i_n}} \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P}} \overline{S \max(k_{i_1}, \ldots, k_{i_n})} \\
& \quad = \overline{k_{i_1}} \vee \quad \vee \overline{S \max(k_{i_1}, \ldots, k_{i_n})} = \overline{k_{i_n}} \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P}} \bot \vee \quad \vee \bot \\
& \rightarrow \neg \text{ Cst } Z_P \wedge \text{Hy}\,] \text{ Cst } Z_P, \bot
\end{aligned}$$

$$\text{Cst } Z_P^{+c}, \bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c})$$

$\alpha, \beta\,] \bigvee_M$ NonStandMod $(M, Z_P^{+c}) \wedge \bigwedge_M$ $\text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^c) \rightarrow$ Non-StandMod (M, Z_P^{+c}).

$$\begin{aligned}
\overset{\gamma)}{\rightarrow} \text{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow & M^* := \langle |M|, \underline{\bar{M}}\{\langle c, c\rangle\}\rangle \\
& \rightarrow \text{Mod}_{\text{norm}}(M^*, Z_P) \\
& \text{mit } 0_{M^*} = 0_M, S_{M^*} = S_M, |M^*| = |M| \\
& \text{so daß } c_M \in |M^*|, c_{M^*} \text{nicht definiert}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{StandMod}\,(N, Z_P) \to \\
&\to \mathrm{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \to \\
&\quad \to \mathrm{StarkInd}(M^*) \overset{\mathrm{Le}_1}{\to} \bigwedge_{u \in |M^*|} \bigvee_{k \in |N|} u = S_{M^*}^{(k)}(0_{M^*}) \\
&\qquad \overset{\mathrm{Spez}}{\to} c_M \in |M^*| = |M| \to] \bigvee_{k \in |N|} c_M = S_{M^*}^{(k)}(0_{M^*}) \\
&\qquad \to \neg \bigwedge_{k \in |N|} c_M \neq S_M^{(k)}(0_M) \wedge \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{Z_P^{+c}} c \neq \bar{k} \\
&\qquad\qquad \wedge \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{Z_P^{+c}} c \neq S^{(k)}(0) \\
&\qquad\qquad \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^{+c}) \\
&\qquad\qquad \wedge \bigwedge_{k \in |N|} c_M \neq S_M^{(k)}(0_M) \\
&\qquad \to \bot \\
&\quad \to \neg\ \mathrm{StarkInd}\ (M^*) \\
&\quad \to \neg\ \mathrm{StandMod}\ (M^*, Z_P) \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M^*, Z_P) \\
&\quad \to \mathrm{NonStandMod}(M^*, Z_P)
\end{aligned}$$

$\mathrm{StandMod}(N, Z_P) \to [\bigvee_M \mathrm{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \to] \bigvee_{M^*}$ Non-Stand Mod(M^*, Z_P), $\bigvee_N \mathrm{StandMod}(N, Z_P) \to \bigvee_N \mathrm{NonStandMod}\ (N, Z_P)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{NonStandMod}(N, Z_P) \to \\
&\overset{\delta)}{\to} \mathrm{NonStandMod}\ (M, Z_P^{+c}) \to \\
&\to \vdash_{Z_P^{+c}} c \neq 0, x = 0 \vee \bigvee_y x = Sy, c_\bperp = 0 \vee] \\
&\qquad \bigvee_y c = Sy \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^{+c}) \\
&\to c_M \neq 0_M \wedge \bigvee_{y \in |M|} c_M = S_M(y) \\
&\to \bigwedge_{l,k \in |N|} \check{S}_M^{(l)}(c_M) = S_M^{(k)}(0_M) \to S_M^{(l)} \check{S}_M^{(l)}(c_M) = S_M^{(l)} S_M^{(k)}(0_M) \\
&\qquad\qquad \to c_M = S_M^{(l +_N k)}(0_M), \bot \\
&\to \bigwedge_{l \in |N|} \neg \bigvee_{k \in |N|} \check{S}_M^{(l)}(c_M) = S_M^{(k)}(0_M)
\end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

StandMod $(N, Z_P) \rightarrow$

$$\rightarrow \text{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow$$
$$\rightarrow |M| = \{0_M, \ldots, S_M^{(k)}(0_M), \ldots | \quad . \check{S}_M^{(k)}(c_M), \ldots c_M,$$
$$S_M(c_M) \ldots S_M^{(k)}(c_M) \ldots\}$$

d.h. $|M|$ ist Vereinigung zweier schnittfreien Mengen, deren eine den natürlichen Zahlen und deren andere den ganzen Zahlen entspricht.

2.) Sind Dg, Dem die arithmetischen Entsprechungen für die Diagonalfunktion $(\text{Dg}(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner A \frac{x_1}{\ulcorner A \urcorner} \urcorner)$ und Demonstrierbarkeit und definiert man die Diagonalendemonstrierbarkeit $\text{Dem}^{\triangle}$ durch:

$$\text{Dem}^{\triangle}(k_1, k_2) \leftrightarrow \bigvee_{k_3} \cdot \text{Dg}(k_1, k_3) \wedge \text{Dem}\,(k_3, k_2).$$
$$\leftrightarrow \text{Dem}\,(\text{Dg}\,\pi_1^2(k_1, k_2), \pi_2^2(k_1, k_2))$$

so ist wegen der (primitiven) Rekursivität von Dem, Dg, π_k^N die Relation $\text{Dem}^{\triangle}$ rekursiv. Sei $\overline{\text{Dem}}^{\triangle}(x_1, x_2)$ die gemäß dem Repräsentationstheorem bestehende negationstreu repräsentierende Satzformel in Z_P für $\text{Dem}^{\triangle}$, so möge $Gx_1 :\leftrightarrow \neg \bigvee_{x_2} \overline{\text{Dem}}^{\triangle}(x_1, x_2)$ als Gödelformel bezeichnet werden. Für ihre Diagonalisierte $G \frac{x_1}{\ulcorner Gx_1 \urcorner}$, die mit $G^{\triangle}$ bezeichnet werden möge, hat Gödel unter Voraussetzung der Consistenz bzw. ω-Consistenz ihre Unbeweisbarkeit bzw. Unwiderlegbarkeit bewiesen.

Mit den vorstehend entwickelten Mitteln zeigen wir unter Voraussetzung StandMod (n, Z_P), daß die Erweiterungstheorie $Z_P[\neg G^{\triangle}]$ ω-inconsistent ist, sie ein Nonstandardmodell, aber kein Standardmodell besitzt, auch jedes ihrer Normalmodelle ein Nonstandardmodell ist.

$$
\begin{aligned}
\text{StandMod}\,(N, Z_P) &\to \not\vdash_{Z_P} G^{\triangle}, \text{Cst } Z_P[\neg G^{\triangle}], \\
&\qquad G^{\triangle} :\leftrightarrow \neg \bigvee_{x_2} \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner G x_1 \urcorner}, x_2) \\
&\to \neg \bigvee_{k \in |N|} \text{Dem}^{\triangle}(\ulcorner G x_1 \urcorner, k) \\
&\to \bigwedge_{k \in |N|} \neg \text{Dem}^{\triangle}(\ulcorner G x_1 \urcorner, k) \\
&\to \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{Z_P} \neg \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner G x_1 \urcorner}, k) \\
&\to \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{Z_P[\neg G^{\triangle}]} \neg\, \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner G x_1 \urcorner}, k) \\
&\qquad \wedge \vdash_{Z_P[\neg G^{\triangle}]} \bigvee_{x_2} \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner G x_1 \urcorner}, x_2) \\
&\quad \neg \bigwedge_{x_2} \neg(\overline{\text{Dem}^{\triangle}}(\overline{\ulcorner G x_1 \urcorner}, x_2)) \\
&\to \omega \text{ Incst}\,(Z_P[\neg G^{\triangle}]) \\
&\to \text{Cst } Z_P[\neg G^{\triangle}] \wedge \neg\, \omega \text{ Cst } Z_P[\neg G^{\triangle}] \\
&\to \bigvee_{m} \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]) \\
&\wedge \bigwedge_{M} \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]) \to \neg \text{StarkIndukt}(M). \\
&\to \bigvee_{M} \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P)[\neg G^{\triangle}]) \wedge \neg \text{StarkIndukt}(M). \\
&\qquad\qquad \wedge \neg \text{StandMod}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]). \\
&\to \bigvee_{M} \text{NonStandMod}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]) \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{M} \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]) \\
&\qquad \to \text{NonStandMod}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]).
\end{aligned}
$$

3.)

$$\text{StandMod}\,(n, Z_P) \to T_n := L[\mathcal{L}_{Z_P}; \{A \in \text{Frm}_{Z_P} | \text{Val}(A, N)\}]$$

Man zeigt durch Vollst Ind nach der Deduktionszahl:

$$\bigwedge_{A \in \text{Frm}_{Z_P}} \vdash_{T_N} A \leftrightarrow \text{Val}\,(A, N),$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

damit: $\vdash_{Z_P} A \to \mathrm{Val}(A, N), \vdash_{T_N} A$
$\mathrm{Erw}(T_N, Z_P)$

$\mathrm{StandMod}\,(N, Z_P) \to$

$$\overset{\alpha)}{\to} \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{T_N} A\frac{x}{k} \to \bigwedge_{k \in |N|} \mathrm{Val}(A\frac{x}{k}, N)$$

$$\to \bigwedge_{k \in |N|} \bigwedge_{v:\mathrm{Var} \to |N|} A^{x}_{\bar{k}\langle N,v\rangle} = 1$$

$$\to \quad A_{\langle N, v^x/\bar{k}_{\langle N,v\rangle}} = 1 \wedge \bar{k}_{\langle N,v\rangle} = k$$

$$\to \bigwedge_{v:\mathrm{Var} \to |N|} \bigwedge_{k \in |N|} A_{\langle N, v^x/k\rangle} = 1$$

$$\to \bigwedge_{v:\mathrm{Var} \to |N|} \bigwedge_{x} A_{\langle N,v\rangle} = 1$$

$$\to \mathrm{Val}(\bigwedge_{x} A, N)$$

$$\to \neg\mathrm{Val}(\neg \bigwedge_{x} A, N)$$

$$\to \bigwedge_{A \in \mathrm{Frm}_{T_N}} \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{T_N} A\frac{x}{k} \to \cdot\neg\vdash_{T_N} \neg \bigwedge_{x} A.$$

$\to \omega\mathrm{Cst}(T_N)$

$\overset{\beta)}{\to} \mathcal{L}_{T_N} = \mathcal{L}_{Z_P} \to]$ $\mathrm{IntprStr}(N, T_N) \wedge \bigwedge_{A \in EAx_{T_N}} \mathrm{Val}\,(A, N)$, $\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(N, t_N) \to$ Hy] Stark Induktiv (N)
$\to \mathrm{StandMod}\,(N, t_N)$
$\to$ Sind $Z_P[c; \{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}]$ und $Z_P[\neg G^{\triangle}]$ Beispiele für ω-inconsistente Theorien, so ist $L[\mathcal{L}_{Z_P}; \{A \in \mathrm{Frm}_{Z_P} | \mathrm{Val}(A, N)\}]$ Beispiel einer ω-consistenten Theorie; da jede Subtheorie einer ω-consistenten Theorie ω-consistent ist, so ist RR als Subtheorie von Z_P ω-consistent.

Definitionszusammenstellung einiger verwendeter Konzepte

Es mögen abkürzen:
Intpr – Interpretation, Func – Funktion, db – Definitionsbereich, Var – Variable, Expr – Expressor, Const – Konstante, Fuor^N – n-stelliger Funktor, Pror^N – n-stelliger Prädikator, c_I–$I'c$, f_I–$I'f$, P_I–$I'P$, IntprStr – Interpretationsstruktur, Mod – Modell, $\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}$ – Normalmodell, $\mathrm{Mod}^{=\aleph_\alpha}_{\mathrm{norm}}$ – Normalmodell der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, InitOrd – Initi-

alordinalzahl (Ordinalzahl, die mit keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig ist, Kardinalzahl im heutigen Sinn).
Dann:

$$\mathrm{Intpr}\,(I, T, M) :\leftrightarrow M \neq \phi \wedge \mathrm{Func}\,(I) \wedge \mathrm{db}(I) = \mathrm{Const}_T \cup \mathrm{Fuor}_T \cup \mathrm{Pror}_T$$

$$\wedge \bigwedge_{c \in \mathrm{Const}_T} c_I \in M \wedge \bigwedge_{f \in \mathrm{Fuor}_T^N} f_I \quad M^N \to M \wedge \bigwedge_{P \in \mathrm{Prop}_T^N} P_I \subseteq M^N$$

$\mathrm{IntprStr}\,(M, T) :\leftrightarrow \bigvee_{M,I} \cdot M = \langle M, I\rangle \wedge \mathrm{Intpr}(I, T, M)$.
Die Charakteristik χ_R einer n-stelligen Relation R sei definiert durch:

$$\chi_R := \{\langle m_1, \ldots, m_n, y\rangle | R(m_1, . \quad , m_n) \wedge$$
$$y = 1_{b^2} \dot{\vee} \neg R(m_1, \ldots, m_n) \wedge y = 0_{b^2}\}$$

Die Fortsetzung der Interpretation von Expressoren ist gegeben durch:
$\mathrm{IntprStr}\,(M, T) \wedge M = \langle M, I\rangle \wedge v \quad \mathrm{Var} \to M$ so:

$$x_{\langle M,v\rangle} = v' x$$
$$c_{\langle M,v\rangle} = c_I$$
$$f(a_1, \ldots, a_n)_{\langle M,v\rangle} = f_I(a_{1\langle M,v\rangle}, \ldots, a_{n\langle M,v\rangle})$$
$$P(a_1, \ldots, a_n)_{\langle M,v\rangle} = \chi_{P_I}(a_{1\langle M,v\rangle}, \ldots, a_{n\langle M,v\rangle})$$
$$\text{sodaß: } P(a_1, . \quad , a_n)_{\langle M,v\rangle} = 1 \leftrightarrow P_I(a_{1\langle M,v\rangle}, \ldots, a_{n\langle M,v\rangle})$$
$$(\neg A_0)_{\langle M,v\rangle} = -(A_{0\langle M,v\rangle})$$
$$\text{sodaß: } (\neg A_0)_{\langle M,v\rangle} = 1 \leftrightarrow \cdot\neg(A_{0\langle M,v\rangle} = 1)$$
$$(A_0 \to A_1)_{\langle M,v\rangle} = A_{0\langle M,v\rangle} \dot{-\!\!\rceil} A_{1\langle M,v\rangle}$$
$$\text{sodaß: } (A_0 \to A)_{1\langle M,v\rangle} = 1 \dot{\leftrightarrow} A_{0\langle M,v\rangle} = 1 \to A_{1\langle M,v\rangle} = 1$$
$$(\bigwedge_x A_0)_{\langle M,v\rangle} = \bigsqcap \{A_{\langle M, v^x/u\rangle} | u \in M\}$$
$$\text{mit } v^x/u = v \backslash \{\langle x, v' x\rangle\} \dot{\cup} \{\langle x, u\rangle\}$$
$$\text{sodaß: } (\bigwedge_x A_0)_{\langle M,v\rangle} = 1 \leftrightarrow \bigwedge_{u \in M} (A_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1)$$
$$(\bigvee_x A_0)_{\langle M,v\rangle} = \bigsqcup \{A_{\langle M, v^x/u\rangle} | u \in M\}$$
$$\text{sodaß: } (\bigvee_x A_0)_{\langle M,v\rangle} = 1 \leftrightarrow \bigvee_{u \in M} (A_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1)$$

$\mathrm{IntprStr}(M, T) \wedge M = \langle M, I\rangle \to c_M = c_I = I' c, f_M = f_I = I' f,$
$P_M = P_I = I' P, |M| = M, \underline{M} = I$

$\mathrm{IntprStr}\,(M,T) \dot{\rightarrow} \mathrm{Val}(\mathcal{A},M) \leftrightarrow \bigwedge_{\nu:\mathrm{Var}\rightarrow|M|} \mathcal{A}_{\langle M,\nu\rangle} = 1_{b^2}$

$\mathrm{Mod}\,(M,T) :\leftrightarrow \mathrm{Intpr\ Str}\,(M,T) \wedge \bigwedge_{\mathcal{A}\in \mathrm{Eig}Ax_T} \mathrm{Val}\,(\mathcal{A},M)$

$\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M,T) :\leftrightarrow \mathrm{Mod}(M,T) \wedge \bigwedge_{u,y\in|M|} u = my \leftrightarrow u = y.$

$\mathrm{T\text{-}Val}\,(\mathcal{A}) :\leftrightarrow \bigwedge_M \cdot \mathrm{Mod}(M,T) \rightarrow \mathrm{Val}(\mathcal{A},M).$

$\mathrm{L\text{-}Val}\,(\mathcal{A}) :\leftrightarrow \bigwedge_M \cdot \mathrm{IntprStr}(M,L) \rightarrow \mathrm{Val}(\mathcal{A},M).$

Damit: $\bigwedge_{\mathcal{A}\in \mathrm{Frm}_T} \mathrm{T\text{-}Val}\,(\mathrm{A}) \leftrightarrow \vdash_T \mathcal{A}.$

$\mathrm{Cst\ T} \rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph}(M,T)$

$\mathrm{Init\,Ord}(\alpha) \wedge \mathrm{Init\,Ord}(\beta) \wedge \alpha \leq \beta \dot{\rightarrow} \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\alpha}(M,T) \rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\beta}(M,T)$

$$\bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_0}(M,T) \leftrightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_\alpha}(M,T)$$

$\mathrm{Cst}\ T_= \rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{\leq\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M,T)$

$$\bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M,T_=) \leftrightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_\alpha}_{\mathrm{norm}}(M,T_=)$$

$$\mathrm{Cst}\ Z_P^+ \rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M,Z_P^+) \text{wegen}$$

$$\neg \bigvee_M \mathrm{Mod}^{<\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M,Z_P^+)$$

$$(\mathrm{Mod}^{<\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M,Z_P^+) \rightarrow \aleph_0 \sim \{S_M^{(k)}(0_M) | k \in |N|\} \subseteq |M| < \aleph_0, \perp)$$

Z_P bedeutet den Peanoformalismus (bei dem das Prinzip der mathematischen Induktion als Axiomenschema vorliegt). Z_P^+ bedeutet eine Erweiterung von Z_P.

Anschrift des Verfassers: Prof. DDr. Curt C. Christian, Institut für Logistik, Universität Wien, Währinger Straße 25, A-1090 Wien.